文章编号: 0438-0479(2002)03-0291-05

复杂区域上粘性/非粘性耦合方程的一个谱元方法

黄凤辉, 许传炬
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 分析粘性/非粘性耦合问题的一个谱元法. 通过基于谱元法的区域分解技巧, 构造并分析了复杂区域中粘性/非粘性耦合问题的一个高阶算法. 通过整体变分方法并借助推广了的 Lax-Milgram 鞍点理论, 证明了离散解的存在唯一性.

关键词: 粘性/非粘性耦合问题; 谱元法; 解的存在唯一性; Inf-Sup 条件
中图分类号: O 241.82, O 175.2　　文献标识码: A

本文尝试将一种求解不可压粘性/非粘性耦合方程的新的耦合技巧推广到更一般的计算区域. 利用基于谱元法的四边形剖分, 粘性/非粘性方程得以在很大一类复杂计算区域中计算实现. 象在单区域上的谱方法情形, 复杂区域上粘性/非粘性耦合方程的谱元法主要困难在于构造兼容的速度和压力空间, 使得著名的 Babuška-Brezzi's Inf-Sup 条件得以满足, 从而保证谱元离散解的存在性和唯一性. 通过子区域转换和 Sobolev 空间上的投影算子, 并借助在有限元方法中采用的 Boland-Nicolaides 技巧[1], 证明了耦合区域上整体 Inf-Sup 条件成立, 从而构造了粘性/非粘性耦合方程的一个适定的谱元离散格式, 证明了数值解的存在唯一性.

记号　假设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上有界的连通开集, 具有边界 $\partial\Omega$; Ω^- 和 Ω^+ 是 Ω 的两个开子集, 且 $\Omega^-\cap\Omega^+=\phi$, $\overline{\Omega^-}\cup\overline{\Omega^+}=\overline{\Omega}$, $\Gamma=\partial\Omega^-\cap\partial\Omega^+$, $\Gamma^s=\partial\Omega\cap\partial\Omega^s$, $s=-,+$.

现对 Ω^-, Ω^+ 作一致四边形剖分, 使得开子集 Ω_k^s, $(s=-,+,1\leqslant k\leqslant K)$ 满足 $\cup_{k=1}^K\overline{\Omega_k^s}=\overline{\Omega^s}$, 且当 $k\neq l$ 时, $\Omega_k^s\cap\Omega_l^s=\phi$, (不失一般性, 假设 Ω^- 和 Ω^+ 中各有 M 个子区域与 Γ 相交且编号靠前), 并设 $\{\overline{\Omega_k^s}, s=-,+,1\leqslant k\leqslant K\}$ 中任意两个集合的交或为空, 或为一个点, 或为一整条边。设 Ω_k^s 的最大边与最小边的比有界.

文中, 用黑体字母表示向量和向量函数, 所有定义在 $\overline{\Omega_k^s}$, $s=-,+$; $1\leqslant k\leqslant K$ 上的量都用上标 s 和下标 k 来表示. 设 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上关于 Ω 的单位外法向量, $\boldsymbol{n}^-$, $\boldsymbol{n}^+$ 分别是 Γ 上关于 Ω^-, Ω^+ 的单位外法向量.

在 Ω^-, Ω^+, $\Omega=[-1,1]^2$ 及其各子区域 Ω_k^s, $s=-,+$, $1\leqslant k\leqslant K$ 中, 我们采用 Hilbert Sobolev 空间上的标准记号以及它们的标准范数和半范.

1　耦合问题

考虑下面粘性/非粘性耦合问题: 对给定 $L^2(\Omega)^2$ 中的 $\boldsymbol{f}$, 求速度和压力 $(\boldsymbol{u},p)$ 使得:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}^- - \upsilon\Delta\boldsymbol{u}^- + \nabla p^- = \boldsymbol{f}^-, & \nabla\cdot\boldsymbol{u}^-=0, \text{ in } \Omega^-\\[2mm] \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}^+ + \nabla p^+ = \boldsymbol{f}^+, & \nabla\cdot\boldsymbol{u}^+=0, \text{ in } \Omega^+\end{cases}\tag{1}$$

配以以下交面条件

$$\begin{cases}\upsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{u}^-}{\partial\boldsymbol{n}^-} - p^-\cdot\boldsymbol{n}^- = p^+\cdot\boldsymbol{n}^+, & \text{on } \Gamma\\[2mm] \boldsymbol{u}^-\cdot\boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{u}^+\cdot\boldsymbol{n}^+, & \text{on } \Gamma\end{cases}\tag{2}$$

及边界条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^-=0, & \text{on } \Gamma^-\\ \boldsymbol{u}^+\cdot\boldsymbol{n}^+=0, & \text{on } \Gamma^+\end{cases}\tag{3}$$

这里 υ, Δt 为正常数.

定义空间

收稿日期: 2001-05-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171084), 福建省自然科学基金资助项目(A9810003)
作者简介: 黄凤辉(1974-), 女, 博士研究生.

$$X = \{ \boldsymbol{v} \mid_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)^2,$$
$$\boldsymbol{v} \mid_{\Omega^+} \in L^2(\Omega^+)^2,\ \boldsymbol{v} \mid_{\Gamma^-} = 0\}$$
$$M = \{ q \mid_{\Omega^-} \in L^2(\Omega^-),$$
$$q \mid_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\} \cup L_0^2(\Omega)$$

并分别赋予范数:

$$\|\boldsymbol{v}\|_X = \|\boldsymbol{v}^-\|_{1,\Omega^-} + \|\boldsymbol{v}^+\|_{0,\Omega^+},$$
$$\|q\|_M = \|q^-\|_{0,\Omega^-} + \|q^+\|_{1,\Omega^+}.$$

那么与(1) ~ (3) 等价的变分形式[2] 是:

求$(\boldsymbol{u}, p) \in X \times M$(空间$X, M$待定), 使得

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v} \in X \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0,\ \forall q \in M \end{cases} \tag{4}$$

这里 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \upsilon(\nabla \boldsymbol{u}^-, \nabla \boldsymbol{v}^-)^-$,

$b(\boldsymbol{v}, q) = -(q^-, \nabla \cdot \boldsymbol{v}^-)^- + (\nabla q^+, \boldsymbol{v}^+)^+ - (q^+ \boldsymbol{n}^+, \boldsymbol{v}^-)^\Gamma$.

$(\cdot, \cdot)^s$, $(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)^\Gamma$ 定义为:

$$(\Phi, \Psi)^s = \int_{\Omega^s} \Phi\Psi,\ (\Phi, \Psi) = (\Phi, \Psi)^- + (\Phi, \Psi)^+,$$
$$(\Phi, \Psi)^\Gamma = \int_\Gamma \Phi\Psi.$$

2 谱元离散

现在考虑基于变分形式(4) 的谱元离散问题:

求$(\boldsymbol{u}_N, p_N) \in X_N \times M_N$, 使得

$$\begin{cases} a_N(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = \\ \quad (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_{GL}\ \forall \boldsymbol{v}_N \in X_N \\ b_N(\boldsymbol{u}_N, q_N) = 0,\ \forall q_N \in M_N \end{cases} \tag{5}$$

这里 $X_N = X \cap \left(\boldsymbol{P}_{N,K}(\Omega^-)^2 \times \boldsymbol{P}_{N,K}(\Omega^+)^2\right)$,

$M_N = M \cap \left(\boldsymbol{P}_{N-2,K}(\Omega^-) \times \boldsymbol{P}_{N,K}(\Omega^+)\right)$.

其中$\boldsymbol{P}_{N,K}(\Omega^s) = \{\varphi_N \mid (\varphi_N \mid_{\Omega_k^s}) \circ F_k^s \in \boldsymbol{P}_N(\Omega), 1 \leqslant k \leqslant K\}$, $s = -, +$. 设 $F_k^s \in C^\infty(\Omega)$: $\Omega \to \overline{\Omega_k^s}$ 为一一映射, 且 F_k^s 及其逆的Jacobi矩阵 J_k^s 和$\tilde{J}_k^s$ 的行列式为正且有界, 即 $d_1 \leqslant |J_k^s(r, s)| \leqslant d_2$, $d_1 \leqslant |\tilde{J}_k^s(r, s)| \leqslant d_2$($d_1, d_2$为正常数). a_N, b_N 分别定义为:

$$a_N(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) = \alpha(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N)_{GL} + \upsilon(\nabla \boldsymbol{u}_N^-, \nabla \boldsymbol{v}_N^-)_{GL}^-,$$
$$\forall\ \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N \in X_N$$
$$b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = -(q_N^-, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_N^-)_G^- + (\nabla q_N^+, \boldsymbol{v}_N^+)_{GL}^+ +$$
$$(q_N^+, \boldsymbol{v}_N^- \cdot \boldsymbol{n}^-)_{GL}^\Gamma,\ \forall \boldsymbol{v}_N \in X_N,\ q_N \in M_N$$

这里$(f, g)_{GL} = (f^+, g^+)_{GL}^+ + (f^-, g^-)_{GL}^-$, 而

$$(f, g)_{GL}^s = \sum_{k=1}^K (f_k, g_k)_{GL,k}^s =$$
$$\sum_{k=1}^K \sum_{GL} (f_k \circ F_k^s)(g_k \circ F_k^s) | J_k^s |,\ s = -, +,$$
$$(f, g)_G^s = \sum_{k=1}^K (f_k, g_k)_{G,k}^s =$$
$$\sum_{k=1}^K \sum_G (f_k \circ F_k^s)(g_k \circ F_k^s) | J_k^s |,\ s = -, +,$$
$$(\varphi, \phi)_{GL}^\Gamma = \sum_{m=1}^M (\varphi_m, \phi_m)_{GL}^{\Gamma_m},$$
$$\sum_{GL} \varphi = \sum_{i,j=0}^N \varphi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j,$$
$$\sum_G \varphi = \sum_{i,j=1}^N \varphi(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j.$$

其中ξ_i 是$(1 - x^2) L_N'(x)$ 的零点, 权系数 ρ_i 由下式给定: $\rho_i = \dfrac{2}{(1 - \zeta_i^2)(L_n'(\zeta_i))^2}$, ζ_i 为$L_N(x)$ 的零点, 权系数 ω_i 满足: $\omega_i = \dfrac{2}{N(N+1) L_N(\xi_i)^2}$,

$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

2.1 解的存在唯一性

我们利用鞍点理论[3,4] 证明问题(5) 的适定性, 这需要证明 a_N, b_N 的连续性, a_N 的椭圆性以及 b_N 的Inf-Sup 条件. 现先验证前三个条件, 而在下一节证明 b_N 的 Inf-Sup 条件. 事实上, 由$\int_\Omega \varphi^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \leqslant \sum_{GL} \varphi^2 \leqslant 9 \int_\Omega \varphi^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$, $\forall \varphi \in \boldsymbol{P}_N(\Omega)$[5] 及$|J_k^s|$ 和$|\tilde{J}_k^s|$ 的有界性易证: $\forall f, g \in \boldsymbol{P}_{N,K}(\Omega^s)$, $s = -, +$,

$$(f, f)_{GL}^s \leqslant c_1 \|f\|_{0,\Omega^s}^2,$$
$$(f, f)_{GL}^s \geqslant c_2 \|f\|_{0,\Omega^s}^2, \tag{6}$$
$$(f, g)_{GL}^s \leqslant c \|f\|_{0,\Omega^s} \|g\|_{0,\Omega^s},$$
$$(f, g)_G^s \leqslant c \|f\|_{0,\Omega^s} \|g\|_{0,\Omega^s} \tag{7}$$

在验证 a_N, b_N 的连续性和a_N 的椭圆性之前需要一个引理.

引理1 给定任意有界的一一映射 F: $\Omega \to \Omega$: $(r, s) \mapsto (x, y)$, 设 F 和它的逆F^{-1} 的Jacobi矩阵分别为:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix},\qquad \tilde{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$$

则 $\forall \boldsymbol{u} \circ F \in \boldsymbol{P}_N(\Omega)^2$, $p \circ F \in \boldsymbol{P}_N(\Omega)$,

有 $(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \circ F = \nabla_{(r,s)} \cdot [\tilde{J}(\boldsymbol{u} \circ F)]$,

$(\nabla p) \circ F = \tilde{J}^T \nabla_{(r,s)}(p \circ F)$,

其中上标 T 表示矩阵的转置.

证明 因为

$$J(\boldsymbol{u}\circ F)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}(u_1\circ F,\ u_2\circ F)^T=$$
$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}(u_1\circ F)+\frac{\partial r}{\partial y}(u_2\circ F),\right.$$
$$\left.\frac{\partial s}{\partial r}(u_1\circ F)+\frac{\partial s}{\partial y}(u_2\circ F)\right)^T$$

所以

$$\nabla_{(r,s)}\cdot[\mathcal{J}(\boldsymbol{u}\circ F)]=$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial r}{\partial x}(u_1\circ F)+\frac{\partial r}{\partial y}(u_2\circ F)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial s}{\partial x}(u_1\circ F)+\frac{\partial s}{\partial y}(u_2\circ F)\right]=$$
$$\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial(u_1\circ F)}{\partial r}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial(u_2\circ F)}{\partial r}+$$
$$\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial(u_1\circ F)}{\partial s}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial(u_2\circ F)}{\partial s}=$$
$$(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\circ F$$

又因为 $\nabla_{(r,s)}(p\circ F)=\left(\dfrac{\partial(p\circ F)}{\partial r},\ \dfrac{\partial(p\circ F)}{\partial s}\right)^T$,

所以

$$(\nabla p)\circ F=\left(\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y}\right)^T\circ F=$$
$$\left(\frac{\partial(p\circ F)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial(p\circ F)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\right.$$
$$\left.\frac{\partial(p\circ F)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial(p\circ F)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)^T=$$
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}^T\left(\frac{\partial(p\circ F)}{\partial r},\ \frac{\partial(p\circ F)}{\partial s}\right)^T=$$
$$\mathcal{J}^T\,\nabla_{(r,s)}\cdot(p\circ F)$$

现利用引理 1 及式(6), (7) 可证 a_N, b_N 的连续性和 a_N 的椭圆性(证明省略):

$$|a_N(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{v}_N)|\leqslant c\,\|\boldsymbol{u}_N\|_X\,\|\boldsymbol{v}_N\|_X,$$
$$a_N(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{u}_N)\geqslant c\,\|\boldsymbol{u}_N\|_X^2,$$
$$|b_N(\boldsymbol{v}_N,q_N)|\leqslant c\,\|q_N\|_M\,\|\boldsymbol{v}_N\|_X$$

2.2 Inf-Sup 条件

由鞍点理论知要使问题(5) 适定, 二次型 b_N 还应在$X_N\times M_N$ 空间上满足Babuŝka Brezzi's Inf-Sup 条件, 即下面的定理需成立.

定理 1　存在常数 $\beta_N>0$, 使得

$$\inf_{q_N\in M_N}\sup_{\boldsymbol{v}_N\in X_N}\frac{b_N(\boldsymbol{v}_N,q_N)}{\|\boldsymbol{v}_N\|_X\,\|q_N\|_M}\geqslant\beta_N$$

基于 Boland & Nicolaides 技巧[1] 及 Xu & Lin 对交面条件处理的方法[6], 可把此问题分解成以下三个相对简单的问题逐步证明:

(1) 局部子区域 Ω_k^-, Ω_k^+ 上的 Inf-Sup 条件

(i) 对局部子区域 Ω_k^- 上粘性型方程谱逼近的 Inf-Sup 条件, 我们希望下面定理成立.

定理 2　存在 $\beta_{N,k}^->0$, 使得

$$\inf_{q_k^-\in L_0^2(\Omega_k^-)\cap M_k^-}\ \sup_{\boldsymbol{v}_k^-\in H_0^1(\Omega_k^-)^2\cap X_k^-}\frac{-(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_k^-,q_k^-)_{G,k}^-}{\|\boldsymbol{v}_k^-\|_{1,\Omega_k^-}\,\|q_k^-\|_{0,\Omega_k^-}}\geqslant\beta_{N,k}^-$$

其中 $M_k^-=\{q_k^-:\exists q^-\in M_N\ s.t.\ q_k^-=q^-|_{\Omega_k^-}\}$,

$X_k^-=\{\boldsymbol{v}_k^-:\exists\boldsymbol{v}^-\in X_N\ s.t.\ \boldsymbol{v}_k^-=\boldsymbol{v}^-|_{\Omega_k^-}\}$.

证明　是下面几个引理的直接结果, 因篇幅所限从略.

引理 2[7]　存在常数 $\beta_N\simeq cN^{-\frac{1}{2}}$ 使得

$$\inf_{q\in L_0^2(\Omega)\cap\boldsymbol{P}_{N-2}(\Omega)}\ \sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^2\cap\boldsymbol{P}_N(\Omega)^2}\frac{-(q,\nabla\cdot\boldsymbol{v})_G}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\,\|q\|_{0,\Omega}}\geqslant\beta_N$$

引理 3[3]　定义空间

$M_D^-=\{q\in L_0^2(\Omega^-)\mid q|_{\Omega_k^-}\in\boldsymbol{R},\ 1\leqslant k\leqslant K\}$,

$X_2^-=\{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega^-)^2\mid \boldsymbol{v}_k\circ F_k^-\in\boldsymbol{P}_2(\Omega)^2,\ 1\leqslant k\leqslant K\}$

那么 $\forall q\in M_D^-$, $\exists\boldsymbol{v}\in X_2^-$, 使得 $-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},q)_G^-=\|q\|_{0,\Omega^-}^2$, 且 $\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega^-}\leqslant c\,\|q\|_{0,\Omega^-}$, $c\leqslant 1$.

引理 4　下列不等式成立

(1) $\displaystyle\int_\Omega\varphi_N^2(1-r^2)^{-1}(1-s^2)^{-1}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\geqslant cN^{-2}|\varphi_N|_1^2,\quad\forall\varphi_N\in\boldsymbol{P}_N^0(\Omega)$,

(2) $\displaystyle\int_\Omega\varphi^2(1-r^2)^{-1}(1-s^2)^{-1}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\leqslant|\varphi|_1^2,\quad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$.

证明　略.

定义 1　假设矩阵 H 正定有界, 并定义算子 π_N: $H_0^1(\Omega)^2\to\boldsymbol{P}_N(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2$, 使得 $\forall\phi\in H_0^1(\Omega)^2$, $\pi_N\phi\in\boldsymbol{P}_N(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2$ 满足

$$\int_\Omega(\pi_N\phi-\phi)\cdot H\psi_N(1-r^2)^{-1}(1-s^2)^{-1}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s=0,\quad\forall\psi_N\in\boldsymbol{P}_N(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2\tag{8}$$

推论 1　$\forall\phi\in H_0^1(\Omega)^2$, $\pi_N\phi\in\boldsymbol{P}_N(\Omega)^2\cap H_0^1(\Omega)^2$ 满足

$$\int_\Omega(\pi_N\phi-\phi)\cdot H\varphi_N\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s=0,\quad\forall\varphi_N\in\boldsymbol{P}_{N-2}(\Omega)^2\tag{9}$$

且 $$\|\pi_N\phi\|_{1,\Omega}\leqslant c\,\|\phi\|_{1,\Omega}\tag{10}$$

其中 c 与H 及N 有关.

(ii) 对于子区域 Ω_k^+ 上非粘性的 Inf-Sup 条件, 文献[8] 已给出了结论, 即引理 5 成立.

引理5 $\exists \beta_k^+ > 0$ 使得

$$\inf_{q_k^+ \in H^1(\Omega_k^+) \cap M_k^+} \sup_{v_k^+ \in L^2(\Omega_k^+)^2 \cap X_k^+} \frac{(\nabla q_k^+, v_k^+)_{GL,k}^+}{\| v_k^+ \|_{0,\Omega_k^+} | q_k^+ |_{1,\Omega_k^+}} \geqslant \beta_k^+$$

其中 $M_k^+ = \{q_k^+ : \exists\ q^+ \in M_N\ s.t.\ q_k^+ = q^+ |_{\Omega_k^+}\}$,

$X_k^+ = \{v_k^+ : \exists\ v^+ \in X_N\ s.t.\ v_k^+ = v^+ |_{\Omega_k^+}\}$.

(2) Ω^-, Ω^+ 区域上的Inf-Sup条件

(i) 对于 Ω^+ 区域上非粘性方程的Inf-Sup条件, 下面结论成立.

定理3 $\exists \beta^+ > 0$ 使得

$$\inf_{q_N^+ \in H^1(\Omega^+) \cap P_{N,K}(\Omega^+)} \sup_{v_N^+ \in L^2(\Omega^+)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^+)^2} \frac{(\nabla q_N^+, v_N^+)_{GL}^+}{\| v_N^+ \|_{0,\Omega^+} | q_N^+ |_{1,\Omega^+}} \geqslant \beta^+$$

证明 由引理5及 v_N^+ 在交面上的非连续性立得.

(ii) 由Boland & Nicolaides技巧可证 Ω^- 区域上粘性方程的Inf-Sup条件.

定理4 $\exists \beta_N^- > 0$, 使得

$$\inf_{q_N^- \in L_0^2(\Omega^-) \cap P_{N-2,K}(\Omega^-)} \sup_{v_N^- \in H_0^1(\Omega^-)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^-)^2} \frac{-(\nabla \cdot v_N^-, q_N^-)_G^-}{\| v_N^- \|_{1,\Omega^-} \| q_N^- \|_{0,\Omega^-}} \geqslant \beta_N^-$$

证明 略.

(3) 耦合区域 Ω 上的Inf-Sup条件

定理1的证明:

$\forall q_N = (q^-, q^+) \in M_N$, 令 $q^- = q_0^- + \tilde{q}^-$, 其中 $\tilde{q}^-$ 为 Ω^- 上的常数, $q_0^- \in L_0^2(\Omega^-) \cap P_{N-2,K}(\Omega^-)$,

那么 $\int_{\Omega^-} \tilde{q}^- q_0^- = 0$,

$$\| q^- \|_{0,\Omega^-}^2 = \| q_0^- \|_{0,\Omega^-}^2 + (\tilde{q}^-)^2 | \Omega^- |$$

由定理4知, $\exists v_0^- \in H_0^1(\Omega^-)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^-)^2$, 使得

$$-(\nabla \cdot v_0^-, q_0^-)_G^- \geqslant \| q_0^- \|_{0,\Omega^-}^2, \text{ 且}$$

$$\| v_0^- \|_{1,\Omega^-} \leqslant \frac{1}{\beta_N^-} \| q_0^- \|_{0,\Omega^-} \tag{11}$$

由文献[3](P41-42)知可找到一个固定的 $v' \in X_N$, 且存在 $w_0 \in H_0^1(\Omega^-)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^-)^2$, 使得

$$(\nabla \cdot v', 1)_G^- = 1,$$
$$(q, \nabla \cdot w_0)_G^- = (q, \nabla \cdot v')_G^-,$$
$$\forall q \in L_0^2(\Omega^-) \cap P_{N,K}(\Omega^-) \tag{12}$$

定义 $v^- = v' - w_0$, 则 $(\nabla \cdot v^-, 1)_G^- = 1$, $(q, \nabla \cdot v^-)_G^- = 0$, $\forall q \in L_0^2(\Omega^-) \cap P_{N,K}(\Omega^-)$, 取 $v^- = v_0^- - \tilde{q}^- v^-$, 则有

$$\begin{aligned}
-(q^-, \nabla \cdot v^-)_G^- &= -(q_0^-, \nabla \cdot v_0^-)_G^- - (\tilde{q}^-, \nabla \cdot v_0^-)_G^- + \tilde{q}^-(q_0^-, \nabla \cdot v^-)_G^- + \\
&\quad \tilde{q}^-(\tilde{q}^-, \nabla \cdot v^-)_G^- \geqslant \| q_0^- \|_{0,\Omega^-}^2 - \tilde{q}^-(1, \nabla \cdot v_0^-)_G^- + \tilde{q}^- \cdot 0 + \\
&\quad (\tilde{q}^-)^2 (1, \nabla \cdot v^-)_G^- \geqslant \\
&\quad \| q_0^- \|_{0,\Omega^-}^2 + (\tilde{q}^-)^2
\end{aligned} \tag{13}$$

类似于 q^-, 令 $q^+ = q_0^+ + \tilde{q}^+$, 其中 $\tilde{q}^+$ 为 Ω^+ 上的常数, $q_0^+ \in L_0^2(\Omega^+) \cap P_{N,K}(\Omega^+)$, 则 $\nabla q^+ = \nabla q_0^+$, $\| q^+ \|_{1,\Omega^+}^2 = \| q_0^+ \|_{1,\Omega^+}^2 + (\tilde{q}^+)^2 | \Omega^+ |$. 由定理3知 $\exists v_0^+ \in L^2(\Omega^+)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^+)^2$, 使

$$(\nabla q^+, v_0^+)_{GL}^+ \geqslant | q^+ |_{1,\Omega^+}^2, = | q_0^+ |_{1,\Omega^+}^2,$$

$$\| v_0^+ \|_{0,\Omega^+} \leqslant \frac{1}{\beta^+} | q_0^+ |_{1,\Omega^+} = \frac{1}{\beta^+} | q^+ |_{1,\Omega^+} \tag{14}$$

由文献[3](P41-42)知可取到 $z \in L^2(\Omega^+)^2 \cap P_{N,K}(\Omega^+)^2$, 使得

$$(z, \nabla q)_{GL}^+ = (q, v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma},$$
$$\forall q \in L_0^2(\Omega^+) \cap P_{N,K}(\Omega^+) \tag{15}$$

再取 $v^+ = v_0^+ + \tilde{q}^- z$, 由 $\tilde{q}^- | \Omega^- | + \tilde{q}^+ | \Omega^+ | = 0$, 及 v_0^-, v^-, v^+ 的定义和(14), (15)得

$$\begin{aligned}
&(\nabla q^+, v^+)_{GL}^+ + (q^+, v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} = \\
&(\nabla q^+, v_0^+)_{GL}^+ + (\nabla q^+, \tilde{q}^- z)_{GL}^+ + \\
&(q^+, v_0^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} - (q^+, \tilde{q}^- v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} \geqslant \\
&| q^+ |_{1,\Omega^+}^2 + \tilde{q}^-(q_0^+, v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} + \\
&(q^+, v_0^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} - \tilde{q}^-(q^+, v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} \geqslant \\
&| q^+ |_{1,\Omega^+}^2 + (q^+, v_0^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} - \\
&\tilde{q}^-(q^+ - q_0^+, v^- \cdot n^-)_{GL}^{\Gamma} = \\
&| q^+ |_{1,\Omega^+}^2 + \frac{| \Omega^+ |}{| \Omega^- |} (\tilde{q}^+)^2
\end{aligned} \tag{16}$$

由(11), (14)以及 v^- 的定义可以估计 v^-, v^+,

$$\| v^- \|_{1,\Omega^-} = \| v_0^- - \tilde{q}^- v^- \|_{1,\Omega^-} \leqslant$$
$$\frac{1}{\beta_N^-} \| q_0^- \|_{0,\Omega^-} + c\tilde{q}^- \leqslant \frac{c_1}{\beta_N^-} \| q^- \|_{0,\Omega^-} \tag{17}$$

$$\| v^+ \|_{0,\Omega^+} = \| v_0^+ + \tilde{q}^- z \|_{0,\Omega^+} \leqslant$$
$$\frac{1}{\beta^+} | q^+ |_{1,\Omega^+} + \tilde{q}^- \| z \|_{0,\Omega^+} \leqslant$$
$$\frac{c_2}{\beta^+} \| q^+ \|_{1,\Omega^+} \tag{18}$$

这里 c, c_1, c_2 依赖于 v'. 取 $v_N = (v^-, v^+)$, 则 $v_N \in X_N$. 再利用(13), (16)~(18), 便得

$$\frac{b_N(v_N, q_N)}{\| v_N \|_X \| q_N \|_M} \geqslant$$

$$\Big\{ \| q_0^- \|_{0,\Omega^-}^2 + (\tilde{q}^-)^2 + | q^+ |_{1,\Omega^+} +$$

$$|\Omega^+|/|\Omega^-|(\tilde{q}^+)^2\Big\}\Big\backslash\Big\{(c_1/\beta_N^- \|q^-\|_{0,\Omega^-} + c_2/\beta^+\|q^+\|_{1,\Omega^+})(\|q^-\|_{0,\Omega^-} + \|q^+\|_{1,\Omega^+})\Big\} \geqslant$$

$$\frac{c(\|q^-\|_{0,\Omega^-}^2 + \|q^+\|_{1,\Omega^+}^2)}{(c_1/\beta_N^- + c_2/\beta^+)(\|q^-\|_{0,\Omega^-} + \|q^+\|_{1,\Omega^+})^2} = \frac{c\beta_N^-\beta^+}{2(c_1\beta^+ + c_2\beta_N^-)} = \beta_N$$

其中 c 与区域有关.

最后根据 a_N, b_N 的连续性和 a_N 的椭圆性以及定理 1 可得离散问题(5) 的适定性.

定理 5　设 Ω 为一般曲边区域, 满足前述区域分解条件, 则谱元离散问题(5) 存在唯一解.

参考文献:

[1] Boland J M, Nicolaides R A. Stability of finite elements under divergence condtraints[J]. SIAM J. Numer. Anal, 1983, 20(4): 722- 731.

[2] Xu C J, Maday Y. A glogal algorithm in spectral method for viscous/inviscid coupling [J]. Chinese Annual of Math. (B), 1997, 18(2): 191- 200.

[3] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics[M]. New York: Spinger-Verlag, 1979. 749.

[4] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problem arising from Lagrange multipliers[J]. J. RAIRO Analyse Numer., 1974, 8(R2): 129.

[5] Quarteroni A, Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equation [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[6] Xu C J, Lin Y M. Analysis of iterative methods for viscous/inviscid coupled problem via a spectral element approximation[J]. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2000, 32: 619- 646.

[7] Belgacem F B, Bermardi C, Chorfi N, et al. Inf-Sup conditions for the mortar spectral elemtent discretization of the Stokes problem[J]. Numer. Math., 2000, 85: 257- 281.

[8] 许传炬. 曲边区域上非粘性型方程谱元方法逼近的 Inf-Sup 条件[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1996, 35(6): 841- 846.

A Spectral Element Method of the Viscous/Inviscid Coupled Equations in Complex Geometries

HUANG Feng-hui, XU Chuan-ju

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: A high order algorithm of the viscous/inviscid coupled equations in complex geometries is analyzed through domain decomposition based on the spectral element method. By applying global variational formulation and the generalized Lax-Milgram saddle-point theory, it is proven that the discrete problem is well-posed.

Key words: viscous/inviscid coupled problem; spectral element method; existence and uniqueness of the solution; Inf-Sup condition